Corrigé

1. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$. Si on choisit $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 50 \end{pmatrix}$, on a :

   $x_{n+1} - 100 = 0,98(x_n - 100) + 2 = 0,98(x_n - 100)$
   $y_{n+1} - 100 = 0,95(y_n - 100) + 5 = 0,95(y_n - 100)$
   $z_{n+1} - 50 = 1,2(z_n - 50) - 10 = 1,2(z_n - 50)$.

   On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = AV_n$ avec $A = \begin{pmatrix} 0,98 & 0 & 0 \\ 0 & 0,95 & 0 \\ 0 & 0 & 1,2 \end{pmatrix}$.

2. $V_0 = \begin{pmatrix} -80 \\ -70 \\ 10 \end{pmatrix}$. On note $V_n = \begin{pmatrix} x_n - 100 \\ y_n - 100 \\ z_n - 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

   Les suites $(x_n - 100)$, $(y_n - 100)$ et $(z_n - 50)$ sont des suites géométriques d'après la question précédente donc on peut écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = a_0 \times 0,98^n = -80 \times 0,98^n$, $b_n = -70 \times 0,95^n$ et $c_n = 10 \times 1,2^n$.

   On a alors : $V_n = A^n V_0 = \begin{pmatrix} -80 \times 0.98^n \\ -70 \times 0,95^n \\ 10 \times 1,2^n \end{pmatrix}$.

3. $V_n = A^n V_0$ donc $U_n = A^n V_0 + \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 50 \end{pmatrix}$.

4. $U_{20} \approx \begin{pmatrix} 46,59 \\ 74,91 \\ 433,38 \end{pmatrix}$.